Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2016
DOCTORADO

1. Sea G un grupo tal que para todo $a, b \in G$ se cumple que

$$(ab)^n = a^n b^n$$

para tres números naturales n consecutivos. Pruebe que G es abeliano.

2. Sea X un espacio topológico y $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Designemos por τ_f la topología cociente en Y. Supongamos que τ es una topología en Y tal que $f : X \to Y$ es continua respecto a esta topología. Demostrar que si f es una aplicación abierta o una aplicación cerrada con respecto a τ, entonces (Y, τ) es homeomorfo a (Y, τ_f). Además, dar ejemplos que prueben que si f no es abierta ni cerrada con respecto a τ, entonces (Y, τ) no es homeomorfo a (Y, τ_f).

3. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\varphi\colon X \to X$ una función continua tal que

$$\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ veces}} = \varphi^n\colon X \to X$$

es una contracción, donde $n > 1$ es un número entero. Pruebe que φ tiene un único punto fijo.

4. Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\dim V = n < \infty$. Dada una transformación lineal $T\colon V \to V$ y una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, definimos

$$\|T\|_{\mathcal{B}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Demuestre que $\|T\|_{\mathcal{B}}$ no depende de $\mathcal{B}$, es decir, dada otra base ortonormal $\mathcal{B}'$ se tiene que $\|T\|_{\mathcal{B}} = \|T\|_{\mathcal{B}'}$.

5. Determine un generador del grupo multiplicativo del cuerpo $\mathbb{F}_{2^5}$ de 32 elementos.