Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2016
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *convexo* si para cada par de puntos $x, y \in A$ y cada $t \in [0,1]$ el punto $(1-t)x + ty$ también pertenece a A.

   La suma de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como
   $$A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}.$$
   Demuestre que la suma de dos conjuntos convexos y compactos es también un conjunto convexo y compacto.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Pruebe que si las subsucesiones $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ y $\{x_{3n}\}$ convergen, entonces $\{x_n\}$ converge.

3. Pruebe que las extensiones $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ son isomorfas.
   Estudie posibles generalizaciones de este resultado.

4. *a*) Sea $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Pruebe que existe $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $B^2 = A$.

   b) Dé un ejemplo de una matriz $A \in M(2, \mathbb{C})$ para la cual no existe $B \in M(2, \mathbb{C})$ con $B^2 = A$.

5. Considere la siguiente definición. Un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es cerrado si y solamente si $C \cap L$ es cerrado en L con la topología usual, para toda recta L en $\mathbb{R}^2$.

   a) Pruebe que la definición anterior define una topología.

   b) Compare con la topología usual.