Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2016
DOCTORADO

1. Sea X un espacio topológico Hausdorff tal que $X = A \cup B$ donde A y B son homeomorfos a un toro y $A \cap B = \{x_0\}$. Calcular $\pi_1(X, x_0)$.

2. Sea R un dominio de integridad y $x \in R$ fijo. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación
$$r \mapsto rx, \quad r \in R.$$
Unsando lo anterior, demuestre que si R es finito, entonces R es un cuerpo.

3. a) Sea A una matriz simétrica y positiva definida. Pruebe que existe una única matriz simétrica y positiva definida B tal que $A = B^2$.
   b) Sea A una matriz simétrica y positiva definida. Pruebe que
   $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}},$$
   donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

4. Escribir todas las clases de semejanza sobre $\mathbb{C}$ de una matriz T de 3×3 con coeficientes en $\mathbb{C}$ que satisface $T^3 = T^2$. En cada clase de semejanza, determine el polinomio característico y el polinomio minimal.

5. Sea $f\colon S^1 \to S^1$ una función continua y sea $x \in S^1$. Existe un número entero $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que el diagrama
$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_1(S^1, f(x)) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n_x"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$
conmuta, donde $\varphi\colon \pi_1(S^1, \cdot) \to \mathbb{Z}$ es el isomorfismo canónico.
   a) Pruebe que el número n_x no depende de x. Este número se llama el *grado* de f y se denota por $\deg(f)$.
   b) Pruebe que si $f, g\colon S^1 \to S^1$ son continuas, entonces $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.