Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2016
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, donde $m \geq 2$. Pruebe que si para algún $c \in \mathbb{R}$ la imagen inversa $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ es compacta, entonces f posee al menos un punto crítico.

2. Sea p un número primo dado. Definimos los siguientes conjuntos

$$A_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\},$$
$$B_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \quad a \equiv 1 \mod p \right\}$$

   a) Demuestre que A_p es un subgrupo de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ y que B_p es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$

   b) Determine los órdenes de A_p y B_p.

   c) Demuestre que $A_p \cong B_p$ si y sólo si $p = 2$.

3. Pruebe que existen polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[t]$ de grado arbitrario. Concluya que $[\mathbf{A}\colon \mathbb{Q}]$ es infinito, donde $\mathbf{A}$ denota el cuerpo de los números algebraicos.

4. *a*) Caracterice todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\sphericalangle(u, v) = \sphericalangle(T(u), T(v))$.

   b) Caracterice todas las funciones $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle u, v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle$.

5. Sean E, B y X espacios topológicos, $p : E \to B$ una función de cubrimiento, y sean $f, g : X \to E$ dos funciones continuas tales que $p \circ f = p \circ g$. Verificar que el conjunto $\{x \in X : \; f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto abierto y cerrado de X.