Universidad de La Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION AGOSTO-2017
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1. Sea $F \leq K$ una extensión galoisiana tal que $|K : F| = 40$.
Demuestre que existe $F \leq J \leq K$ galoisiana tal que $|K : J| = 2$.

2. Sea f una función continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$. Suponga que $f(0) = 0$ y $0 < f'(x) \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$. Pruebe que

$$\int_0^1 (f(x))^3 \mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \right)^2$$

Además, determine condiciones necesarias y suficientes para obtener la validez de la igualdad.

3. Sea X el espacio topológico formado por la esfera $\mathbb{S}^2$ y el segmento de recta desde el polo norte al polo sur. Determine $\pi_1(X)$.

4. Sean $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathcal{V}$ y f una forma bilineal en $\mathcal{V}$ representada en la base β por la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Pruebe que S define un producto interno en $\mathcal{V}$.
   b) Denotemos por $(\ ,\ )$ el producto interno definido por S. Para cada $i = 1, ..., n$ determine $(e_i)^\perp$ relativo a $(\ ,\ )$.

5. Sean (X, d) un espacio métrico y B_X el conjunto de todos los subconjuntos acotados de X. Considere la función $\eta : B_X \to [0, +\infty)$ definida por

$$\eta(A) = \text{Inf}\{\epsilon \ / \ A \text{ es cubierto por una cantidad finita de bolas de radio } \epsilon\}$$

Pruebe que si $\eta(A) > 0$, entonces existe $A_0 \subset X$ numerable con $\eta(A) \leq \eta(A_0)$.