Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACION 2017
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

donde a_n son reales y $|a_n| \leq n^{-3}$. Pruebe que cualquier sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en $[0,1]$.

2. Sea $A \in \mathbb{M}(n,F)$ tal que $A^m = Id$ para algún entero m, donde F es un cuerpo.

   Estudie en términos de F y m cuándo se puede diagonalizar A.

3. *a*) Calcule el primer grupo de homología de

$$P\mathbb{R}^2 \# P\mathbb{R}^2 \quad \text{(suma conexa)}$$

   b) Pruebe que $P\mathbb{R}^3$ no es un retracto de deformación de $P\mathbb{R}^4$.

4. Sea G un grupo infinito tal que para todo subgrupo $\{1\} \neq H \leq G$ el índice $|G:H|$ es finito.

   a) Pruebe que G es finitamente generado.

   b) Pruebe que el centro $\mathbf{Z}(G) \neq \{1\}$.

   c) Pruebe que $G \cong \mathbb{Z}$.

5. Muestre que si $n > 1$, entonces toda función continua desde el espacio proyectivo real $P\mathbb{R}^n$ al toro n-dimensional $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es homotópica a la función constante.